

Не са написани някои неща, които вече фигурират във [файла по Дискретни структури](#) в [Лекция 2](#), [Лекция 3](#), [Лекция 4](#) и [Лекция 6](#).

Лекция 1 Реални числа - първа част

1.1 Множества

Множество на естествените числа $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Множество на целите числа $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Множество на рационалните числа $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Множество на реалните числа $\mathbb{R} = \{s a_0.a_1a_2 \dots : s \in \{+, -\}, a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_n \in \{1, 2, \dots, 9\}, n \in \mathbb{N}\}$

Нека $a = a_0.a_1a_2 \dots$, $b = b_0.b_1b_2 \dots$ и $a, b \in \mathbb{R}$.

- **Равенство:**

$a = b$, ако имат еднакви знаци и

– или $a_i = b_i$ за всички $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

– или съществува $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такова че $a_i = b_i$ за всички $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $a_n = b_n + 1$ и $a_j = 0, b_j = 9$ за всички $j \in \{n+1, n+2, \dots\}$

Тоест $a_0.a_1a_2 \dots a_{n-1}a_n00 \dots = a_0.a_1a_2 \dots a_{n-1}(a_n-1)99 \dots$ ($1.33 \dots 3300 \dots = 1.33 \dots 3299 \dots$)

- **Сравняване:**

1. $a \geq 0, b \geq 0$

$$a \leq b \iff \begin{cases} a_i = b_i, & \forall i \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ \text{или} \\ \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, & a_i = b_i \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ и } a_n < b_n \end{cases}$$

2. $a \leq 0, b \geq 0$ $a \leq b$

3. $a \leq 0, b \leq 0$ $a \leq b \iff |a| \geq |b|$

1.2 Граници и ограниченост

Нека $A \subset \mathbb{R}$

- **Множество, ограничено отгоре** $\exists M \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq M$ M - горна граница (*мажоранта*)

Най-малката горна граница наричаме *точна горна граница* или *супремум* на A ($\sup A$)

1. $a \leq \sup A \forall a \in A$ ($\sup A$ е горна граница)

2. $\forall c < \sup A \exists a \in A : a > c$ (няма по-малка горна граница)

- **Множество, ограничено отдолу** $\exists M \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \geq M$ M - долна граница (*миноранта*)

Най-малката долна граница наричаме *точна долна граница* или *инфимум* на A ($\inf A$)

- **Ограничено множество** Ако е ограничено отдолу и отгоре

Принцип на непрекъснатост: Всяко ограничено отгоре непразно множество $A \subset \mathbb{R}$ има супремум.

Всяко ограничено отдолу непразно множество $A \subset \mathbb{R}$ има инфимум.

Цялата част на $x \in \mathbb{R}$: най-голямото цяло число z , ненадминаващо x . $[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$

Лекция 2 Реални числа - втора част и сходящи редици

2.1 Непрекъснати наредени полета

Нека R е поле с дефинирани събиране, умножение е релацията \preceq :

$$\oplus : R \rightarrow R, \quad \otimes : R \rightarrow R, \quad \preceq \subset R \times R$$

$(R, \oplus, \otimes, \preceq)$ се нарича непрекъснато наредено поле, ако са в сила:

I. Аксиоми за събирането

1. Асоциативност $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad \forall a, b, c \in R$
2. Комутативност $a \oplus b = b \oplus a \quad \forall a \in R \forall b \in R$
3. Неутрален елемент $\exists 0 \in R \forall a \in R : a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$
4. Противоположен елемент $\forall a \in R \exists (-a) \in R : a \oplus (-a) = (-a) \oplus a = 0$

II. Аксиоми за умножението

1. Асоциативност $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \quad \forall a, b, c \in R$
2. Комутативност $a \otimes b = b \otimes a \quad \forall a \in R \forall b \in R$
3. Неутрален елемент $\exists e \in R \forall a \in R : a \otimes e = e \otimes a = a$
4. Обратен елемент $\forall a \in R, a \neq 0 \exists a^{-1} \in R : a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = e$
5. Дистрибутивност $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \quad \forall a, b, c \in R$

III. Аксиоми, свързани с наредбата

1. $\forall a, b \in R : a \preceq b$ или $b \preceq a$
2. Рефлексивност $a \preceq a \quad \forall a \in R$
3. Антисиметричност $a \preceq a$ и $b \preceq a \implies a = b \quad \forall a, b \in R$
4. Транзитивност $a \preceq b$ и $b \preceq c \implies a \preceq c \quad \forall a, b, c \in R$
5. Връзка със събирането $a \preceq b \implies a \oplus c \preceq b \oplus c \quad \forall a, b, c \in R$
6. Връзка с умножението $a \preceq b \implies a \otimes c \preceq b \otimes c \quad \forall a, b, c \in R$

Аксиома на Архимед: Ако $(R, \oplus, \otimes, \preceq)$ е непрекъснато наредено поле с неутрален елемент e относно умножението, то $\{e, e + e, e + e + e, \dots\}$ не е ограничено отгоре.

2.2 Изброими множества и редици

Кофинитно множество: Едно множество $A \subset \mathbb{N}$ от естествени числа се нарича кофинитно, ако $\mathbb{N} \setminus A$ е крайно или празно. (тоест, започва от някое число в \mathbb{N} и продължава до безкрайност)

Околност на точка: Нека $a \in \mathbb{R}$ и $U \subset \mathbb{R}$. U е околност на точката a , ако съществува $\varepsilon > 0$ такава, че $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$

Ако разглеждаме $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}$, говорим за *пробита околност*

Граница на редица: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ има граница $a \in \mathbb{R}$, ако за всяка околност на a , $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in U\}$ е кофинитно. (тоест, ако всяка околност на a съдържа почти всички членове)

Сходяща редица: Ако за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ съществува $a \in \mathbb{R}$, такава че $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ или $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$

Разходяща редица: Ако не е сходяща

Лекция 3 Редици от реални числа

3.1 Основни свойства на сходящи редици

Ако не е определено друго: $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$

1. Добавянето и премахването на краен брой членове не влияе на сходимостта (и границата)
2. Сходящите редици са ограничени
3. Ако $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$, то $a \leq b$
4. *Лема за двамата полицаи:* Нека $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$.
Ако $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, то $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ (и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща)

Следствие: Ако $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, то $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

5. $a_n \pm b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \pm b$ $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$

Следствие: Ако $c \in \mathbb{R}$, то $c \cdot a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ca$

Следствие: $a_n - b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a - b$

6. Ако $b \neq 0$, то $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}$

3.2 Дивергиране към безкрайност

Околност на $+\infty$: Ако съществува $M \in \mathbb{R}$ такава, че $(M, +\infty) \subset U$, то $U \subset \mathbb{R}$ е околност на $+\infty$

Околност на $-\infty$: Ако съществува $M \in \mathbb{R}$ такава, че $(-\infty, M) \subset U$, то $U \subset \mathbb{R}$ е околност на $-\infty$

Околност на ∞ : Ако съществува $M > 0$ такава, че $[(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)] \subset U$,
то $U \subset \mathbb{R}$ е околност на ∞

3.3 Монотонни редици

Растяща редица: Ако $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е растяща

Намаляваща редица: Ако $a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е намаляваща

Монотонна редица: Ако редицата е растяща или намаляваща

Ако редицата е растяща и намаляваща едновременно, тя е *стационарна*

Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща и ограничена отгоре, тя е сходяща.

Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща и ограничена отдолу, тя е сходяща.

3.4 Неперово число

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

Лекция 4 Редици от реални числа. Граници на функции.

4.1 Подредици и точки на съгъстяване

Точка на съгъстяване: $a \in \mathbb{R}$ е точка на съгъстяване, ако във всяка околност на a има безброй много членове на редицата

За $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на съгъстяване, ако за всяка околност U на x_0 , $U \cap D$ е безкрайно

Ако $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, то a е (единствената) точка на съгъстяване

Подредица: Ако задраскаме част от членовете, така че да останат безкрайно много и запазим реда на останалите

Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща редица ($a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$) и $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е нейна подредица, то $a_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

a е точка на съгъстяване, когато съществува $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$

Теорема на Болцано-Вайерщрас (Принцип за компактност): Всяка ограничена редица има точка на съгъстяване. Еквивалентно, всяка ограничена редица има сходяща подредица.

4.2 Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост

Фундаментална редица: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n_0 \forall n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$ (тоест, чрез отстраняване на краен брой елементи от началото, разстоянието между произволни два от останалите може да се направи произволно малко)

Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост на числова редица: Една редица от реални числа е сходяща точно тогава, когато е фундаментална

4.3 Граница на функция

Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на съгъстяване на D

Граница на функция (форма на Коши):

f има граница $L \in \mathbb{R}$, при аргумент клонящ към x_0 ,

ако за всяка околност U на L съществува околност V на x_0 , така че за всяко $x \in V \cap D, x \neq x_0 : f(x) \in U$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{ако} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta : |f(x) - L| < \varepsilon$$

Граница на функция (форма на Хайне):

f има граница $L \in \mathbb{R}$, при аргумент клонящ към x_0 ,

ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}$, която клони към x_0 , съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ клони към L

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x : f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$$

Лекция 5 Граници на функции

Дефинициите за граница на функция във *формата на Коши* и във *формата на Хайне* са еквивалентни

5.1 Основни свойства на граници

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L_f + L_g$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_f \cdot L_g$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L_f}{L_g}$, ако $L_g \neq 0$

При неравенства

- Ако $f(x) \leq g(x)$ за $x \in D$, то $L_f \leq L_g$
- Ако $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ за $x \in D$ и $L_1 = L_2$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L_1 = L_2$

Композиция на функции: $g \circ f : X \rightarrow Z, (g \circ f)(x) = g(f(x))$, при $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$

Необходимо и достатъчно условие на Коши за съществуване на граница на функция:

$$\exists L \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{Лява граница: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &:= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f|_{D \cap (-\infty, x_0)} \right) (x) \\ \text{Дясна граница: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) &:= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f|_{D \cap (x_0, +\infty)} \right) (x) \end{aligned}$$

Лекция 6 Непрекъснати функции

Непрекъснатата функция:

Форма на Коши: $(\forall x_0 \in D) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Форма на Хайне: $(\forall x_0 \in D) \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 : f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$

6.1 Основни теореми

Ако не е посочено друго, работим с $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, която е непрекъснатата

Теорема на Болцано: Ако $f(a) \cdot f(b) < 0$, то съществува $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$

Теорема за междинните стойности: Ако $f(a) < c < f(b)$ или $f(b) < c < f(a)$, то съществува $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = c$

Интервал: $\Delta \subset \mathbb{R}$ наричаме интервал, ако $x_1 \in \Delta, x_2 \in \Delta, x_1 < x_2 \implies [x_1, x_2] \subset \Delta$

Теорема на Вайерщрас: Щом f е непрекъснатата, то f е ограничена и има най-голяма и най-малка стойност

Равномерна непрекъснатост: За $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, f е равномерно непрекъснатата в D , ако $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (различава се с това, че никога не зависим от x_0)

Теорема на Кантор: Ако f е непрекъснатата, то f е равномерно непрекъснатата в $[a, b]$

Лекция 7 Основни елементарни функции

Продължение на функцията: За $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ казваме, че $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е продължение на f , ако $\tilde{f}(x) = f(x)$ за всяко $x \in \mathbb{Q}$

f притежава (единствено) непрекъснато продължение $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, когато f е непрекъснатата върху всеки ограничен затворен интервал $[c, d] \cap \mathbb{Q}$

Експонента: Единственото непрекъснато продължение \tilde{f}_a на $f_a(x) = a^x$ наричаме експонента с основа a , $a^x := \tilde{f}_a(x) \forall x \in \mathbb{R}$

7.1 Обратни тригонометрични функции

1. arcsin: $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ $\arcsin \equiv \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $\sin(\arcsin(y)) = y \quad \forall y \in [-1, 1]$ $\arcsin(\sin(x)) = x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (еквивалентно за останалите)
2. arccos: $\cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ $\arccos \equiv \left(\cos|_{[0, \pi]} \right)^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
3. tg: $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ $\operatorname{arctg} \equiv \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1} : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
4. arccotg: $\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)} : (0, \pi) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ $\operatorname{arccotg} \equiv \left(\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)} \right)^{-1} : (-\infty, +\infty) \rightarrow (0, \pi)$

7.2 Основни граници

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} x &= x_0 & \lim_{x \rightarrow x_0} c &= c & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} &= 1 & \lim_{x \rightarrow 0} a^x &= 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \log_a e & \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \right) & & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} &= a \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a, \quad a > 0 & \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right) & & & & & & & & \\ e^x &= \lim_{n \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n & e^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n} \right)^{p_n b_n}, & p_n &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \pm \infty \end{aligned}$$

Неравенство на Бернули: $(1+x)^n \geq 1+nx, x \geq -1$

Лекция 8 Диференцируемост и производна

Диференцируемост на функция: $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точка $x \in \Delta$, ако съществува граница $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Ако f е диференцируема в x , то f е непрекъсната в x

8.1 Правила за диференциране

- Диференциране на сума: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
Диференциране на разлика: $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
- Диференциране на произведение: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Диференциране на произведение с константа: $(cf)'(x) = cf'(x)$
Диференциране на частно: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- Диференциране на композиция от функция: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$
- Диференциране на обратна биекция: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

8.2 Основни производни

$$\begin{aligned} (e^x)' &= e^x & (a^x)' &= a^x \cdot \ln a \quad (a > 0) & (\ln x)' &= \frac{1}{x} & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1) \\ (x^a)' &= ax^{a-1} \\ (\sin x)' &= \cos x & (\cos x)' &= -\sin x & (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} & (\operatorname{cotg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1) & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1) \\ (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} & (\operatorname{arccotg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Лекция 9 Основни теореми за диференцируеми функции

Локален екстремум на функция: Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f има локален минимум в x_0 , ако съществува $\delta > 0$, такава че $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in D$ и $f(x_0) \leq f(x)$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Аналогично има локален максимум ако $f(x_0) \geq f(x)$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Теорема на Ферма: Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 е точка на локален екстремум и f диференцируема в x_0 . Тогава $f'(x_0) = 0$.

Теорема на Рол: Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f диференцируема в (a, b) , f непрекъсната в точките a, b и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува $\xi \in (a, b)$, такова че $f'(\xi) = 0$.

9.1 Теорема на крайните нараствания и следствия

Теорема на Лагранж (Теорема за крайните нараствания): Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f диференцируема в (a, b) , f непрекъсната в точките a, b . Тогава съществува $\xi \in (a, b)$, такова че $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Принцип за константност (Основна теорема на диференциалното смятане): Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, f диференцируема в Δ . f е константа точно тогава, когато $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \Delta$.

Принцип за монотонност: Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, f диференцируема в Δ .
 f растяща в $\Delta \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Delta \quad f$ намаляваща в $\Delta \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Delta$

Производни от по-висок ред: Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, $f'(x)$ съществува за всяко $x \in \Delta$. Означаваме $f''(x) := (f')'(x)$ и индуктивно дефинираме, $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$. $f^{(0)} := f$.

9.2 Обобщена теорема на крайните нараствания и следствия

Теорема на Коши (Обобщена теорема за крайните нараствания): Нека $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g диференцируеми в (a, b) , f, g непрекъснати в $[a, b]$ и $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Тогава съществува ξ , такова че $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

1-ва теорема на Лопитал (неопределеност $\left[\frac{0}{0}\right]$): Нека $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, диференцируеми в (a, b) , непрекъснати в b , $f(b) = g(b) = 0$, $g'(x) \neq 0$ в (a, b) и съществува $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогава съществува $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2-ра теорема на Лопитал (неопределеност $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$): Нека $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, диференцируеми в (a, b) , $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ в (a, b) и съществува $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогава съществува $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Лекция 10 Полином на Тейлър

Нека $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ са n пъти диференцируеми. $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad (c \cdot f)^{(n)} = c \cdot f^{(n)}$

Формула на Лайбниц: Нека $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ отворен интервал и са n пъти диференцируеми.

Тогава $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

10.1 Полином на Тейлър

Означение о-малко: Нека $g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ и $g(x) \neq 0$. $f(x) = o(g(x))$ ($f(x)$ е о-малко от $g(x)$) ако $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Полином на Тейлър от n -та степен около точка a : Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, $a \in \Delta$, f е $(n - 1)$ пъти диференцируема в Δ , f е n пъти диференцируема в a . Тогава

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

10.2 Формула на Тейлър

Формула на Тейлър за f около a с остатъчен член във форма на Пеано:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Формула на Тейлър за f около a с остатъчен член във форма на Лагранж:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\xi(x) \text{ е между } a \text{ и } x}$$

Формула на Маклорен: Формула на Тейлър, за която $a = 0$

10.3 Равитие на някои функции в ред на Маклорен

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$
4. $(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$
5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$

Лекция 11 ДУ за лок. екстремум. Изпъкнали функции.

Достатъчно условие за локален екстремум, използващо n -та производна: Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, $x_0 \in \Delta$, $n \geq 2$, f е $(n-1)$ пъти диференцируема в Δ , f е n пъти диференцируема в x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогава:

- Ако n е четно, x_0 е точка на локален екстремум. Ако $f^{(n)}(x_0) > 0$, x_0 е строг локален минимум, иначе ако $f^{(n)}(x_0) < 0$, x_0 е строг локален максимум.
- Ако n е нечетно, x_0 не е точка на локален екстремум.

11.1 Изпъкнали множества и функции

Изпъкнало множество: Нека $A \subset \mathbb{R}^2$. Ако за всеки избор на $a', a'' \in A$, цялата отсечка $[a', a'']$, лежи изцяло в A . Или формално:

$$[a', a''] := \{a' + t(a'' - a') \mid t \in [0, 1]\} = \{p_1 a' + p_2 a'' \mid p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1\}$$

Епиграфика на функцията f : Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Епиграфика наричаме:

$$\text{epi}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D, y \in \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$$

Изпъкнала функция: Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. f наричаме изпъкнала, ако $\text{epi}(f)$ е изпъкнало подмножество на равнината.

Теорема: Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. f е изпъкнала тстк $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad \forall x_1, x_2, x \in D : x_1 < x < x_2$

Теорема: Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, f диференцируема в Δ . f изпъкнала $\iff f'$ е растяща в Δ .

Следствие: Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ отворен интервал, f два пъти диференцируема в Δ . f изпъкнала точно когато $f'' \geq 0$ в Δ .

Твърдение: Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ е изпъкнала. Тогава f е непрекъсната точка x_0 , която притежава околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, съдържаща се изцяло в D .

11.2 Неравенство на Йенсен

Неравенство на Йенсен: Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ е изпъкнала, произволни $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Delta$, с тегла $p_1, \dots, p_n \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$. Тогава е изпълнено:

$$f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$$

Лекция 12 Неопределен интеграл. Техники на интегриране.

Примитивна за функция f : Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ интервал. Функция $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ се нарича примитивна за f , ако F диференцируема в Δ и $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \Delta$

Неопределен интеграл на f : Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Неопределен интеграл на f е множеството от всички примитивни на f в Δ .

12.1 Таблица на основните интеграли

$$\begin{aligned} \int e^x dx &= e^x + C & \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 & \int \frac{dx}{x} &= \ln|x| + C & \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C & \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= \operatorname{cotg} x + C & \int \frac{dx}{1+x^2} &= \operatorname{arctg} x + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \operatorname{arcsin} x + C & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} &= \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C & & & & \end{aligned}$$

12.2 Техники за интегриране

- *Линейност*

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad \int (k \cdot f(x)) dx = k \int f(x) dx$$

- *Внасяне под знака на диференциала*

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = G(f(x)) + C, \text{ където } g(y) = G'(y) \quad df(x) := f'(x) dx$$

- *Интегриране по части*

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \quad \int f(x)d(g(x)) = f(x)g(x) - \int g(x)d(f(x))$$

Лекция 13 Интегриране чрез субституции и на рационални ϕ -и

Интегриране чрез субституции: Нека $f : \Delta_x \rightarrow \mathbb{R}$ непрекъсната, $\varphi : \Delta_t \rightarrow \Delta_x$ биекция, φ, φ^{-1} диференцируеми и Δ_x, Δ_t отворени интервали. Ако е изпълнено

$$\int f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C, \text{ то } \int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

Интегриране на рационални функции: Нека $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, където P, Q са полиноми на x .

1. *Свеждане към интегриране на правилна рационална функция* (тоест свеждане към рационална функция с по-малка степен на числителя отколкото на знаменателя)

Ако $\deg P \geq \deg Q$, от алгебрата е извечтно, че $\exists P_1, P_2 : \frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, $\deg P_2 < \deg Q$.

От тук нататък предполагаме, че $\deg P < \deg Q$.

2. *Разлагане на знаменателя на множители*

Ако $\deg Q = n$, от алгебрата полиномът Q има точно n комплексни корена $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ и $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = a_0(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n)$

След доказателство, полиномът Q с реални коефициенти може да се разложи на:

$$Q(x) = a_0(x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_s)^{\alpha_s} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{\beta_t} \quad p_j^2 - 4q_j < 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, t\}$$

3. *Представяне на рационална функция като сума на елементарни дроби*

Приемаме без доказателство, че за горното съществуват константи $A_1^i, A_2^i, \dots, A_{\alpha_i}^i$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ $M_j^1, M_j^2, \dots, M_j^{\beta_j}$, $N_j^1, N_j^2, \dots, N_j^{\beta_j}$ $j \in \{1, 2, \dots, t\}$, такива че за всяко x е изпълнено:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \sum_{i=1}^s \left(\frac{A_1^i}{x - a_i} + \frac{A_2^i}{(x - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_i}^i}{(x - a_i)^{\alpha_i}} \right) + \\ & + \sum_{t=1}^t \left(\frac{M_j^1 x + N_j^1}{x^2 + p_j x + q_j} + \frac{M_j^2 x + N_j^2}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \dots + \frac{M_j^{\beta_j} x + N_j^{\beta_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j}} \right) \end{aligned}$$

Търсим константите. Забелязваме, че те са $\alpha_1 + \dots + \alpha_s + 2\beta_1 + \dots + 2\beta_t = \deg Q$ на брой.

Елементарна дроб от първи вид: Рационална функция от вида $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ $A, a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\int \frac{A}{(x-a)^\alpha} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^\alpha} = A \int (x-a)^{-\alpha} d(x-a) = \begin{cases} \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha \neq 1 \\ \ln|x-a| + C & \alpha = 1 \end{cases}$$

Елементарна дроб от втори вид: Рационална функция от вида $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}$ $M, N, p, q \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{N}$, $p^2 - 4q < 0$. Интегрирането и започва със субституция на Хорнер $y = x + \frac{p}{2}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta} dx &= \int \frac{M'y + N'}{(y^2+b^2)^\beta} dy = M' \int \frac{y}{(y^2+b^2)^\beta} dy + N' \int \frac{dy}{(y^2+b^2)^\beta} = \\ &= \frac{M'}{2} \int \frac{d(y^2+b^2)}{(y^2+b^2)^\beta} + N' \int \frac{dy}{(y^2+b^2)^\beta} = \dots \end{aligned}$$