Домашна работа 3 по Алгебра 1. 1 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

03 Януари 2022

1,00/1,00 Точки   Коментар: [няма]

1 Въпрос В пространството F^4 на наредените четворки с елементи от поле F са дадени линейна обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите

$$a_1 = (3, -1, -1, 1) \quad a_2 = (-1, 1, -3, 3)$$

и пространство от решения W на хомогенна система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrcl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ и на сумата $U + W$.

Решение: Търсим базис на W. Съставяме следната матрица от коефициенти на решения:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

x_3 и x_4 са свободни променливи. Тогава съставяме фундаментална система решения:

$$x_3 = 0 \quad x_4 = 3 \implies x_1 = 1 \quad x_2 = 8 \quad (1, 8, 0, 3)$$
$$x_3 = 3 \quad x_4 = 0 \implies x_1 = 7 \quad x_2 = 5 \quad (7, 5, 3, 0)$$

Разглеждаме матрицата от базисите на U и W:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Събираме втори ред с трети. Умножаваме втори по 3 и събираме първи.
Умножаваме втори по 7 и събираме с четвърти.
Делим първи ред на 2. Делим трети и четвърти на 3

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи по -1 и събираме с втори.
Умножаваме първи по -3 и събираме с трети.
Умонжаваме първи по -4 и събираме с четвърти.

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -13 \\ 0 & 0 & 14 & -13 \end{pmatrix}$$

Умножаваме трети по -1 и събираме с четвърти.
Умножаваме първи и втори ред по 14. Умножаваме трети по 5 и събираме с първи. Умножаваме трети по -2 и събираме с втори.
Умножаваме втори по -1. Разменяме първи и втори ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 14 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 14 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следователно базис на $U + W$ е: $(14, 0, 0, 2), (0, 14, 0, 5), (0, 0, 14, -13)$

Търсим фундаментална система решения на U:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -10 & 10 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

x_3 и x_4 са независими променливи. Съставяме фундаментална система решения:

$$x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \implies x_1 = -2 \quad x_2 = -5 \quad (-2, -5, 0, 1)$$
$$x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \implies x_1 = 2 \quad x_2 = 5 \quad (2, 5, 1, 0)$$

Разглеждаме матрица от фундаменталните системи решения на U и W:

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

Събираме първи ред с втори. Умножаваме трети по 2.
Умножаваме първи по 3 и събираме с трети.
Умножаваме втори ред по -14 и събираме с трети.
Умножаваме втори по -5 и събираме с четвърти.

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & -28 & -13 \\ 0 & 3 & -10 & -13 \end{pmatrix}$$

Умножаваме четвърти ред по 5 и събираме с трети.
Умножаваме втори ред по 78 и събираме с трети.
Умножаваме втори ред по 10 и събираме с четвърти.

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред по 3. Умножаваме четвърти по 5 и събираме с първи. Делим първи на -6. Делим четвърти на 3.
Разменяме трети с четвърти и втори с трети.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицата е несъвместима със свободен член $x_4 = p$. Пресмятаме, че:
$x_1 = -2p,\ x_2 = p,\ x_3 = -p$
$\implies$ Базис на $U \cap W$ е: $(-2p, p, -p, p)$ за произволно $p \in F$

Домашна работа 3 по Алгебра 1. 2 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

03 Януари 2022

1,00/1,00 Точки   Коментар: [няма]

2 Въпрос В линейно пространство U над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа са дадени базиси

$$e = (e_1, e_2) \text{ и } e' = (e'_1, e'_2) \quad \text{с} \quad e'_1 = e_1 + 3e_2, \quad e'_2 = 2e_1 + 5e_2$$

а в линейното пространство V над $\mathbb{Q}$ са дадени базиси

$$f = (f_1, f_2, f_3) \text{ и } f' = (f'_1, f'_2, f'_3) \quad \text{с} \quad f_1 = f'_1 + 3f'_2 + 6f'_3, \quad f_2 = -f'_2 - 2f'_3, \quad f_3 = -f'_1 - 4f'_2 - 7f'_3$$

Да разгледаме линейно изображение $\varphi : U \to V$, зададено чрез

$$\varphi(x_1 e'_1 + x_2 e'_2) = (2x_1 + 4x_2)f'_1 + (6x_1 + 12x_2)f'_2 + (14x_1 + 27x_2)f'_3$$

за произволни $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$. Да се намери матрицата A на φ спрямо базиса $e = (e_1, e_2)$ на U и базиса $f = (f_1, f_2, f_3)$ на V.

Решение: Нека $e' = eT'$, $e = e'T$, $f = f'S$ и A' е матрицата на φ спрямо базиса e' и f'.

От условие, извеждаме че $T' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. $e = e'T = eT'T$ $E_2 = T'T$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Умножаваме първи ред по -3 и събираме с втори. Умножаваме втори по 2 и събираме с първи. Умножаваме втори по -1.

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$ Следователно $T = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

От условие, извеждаме че $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix}$. $SS^{-1} = E_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -7 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Умножаваме втори ред по -2 и събираме с трети. Умножаваме първи по -3 и събираме с втори.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Събираме трети ред с първи и втори. Умножаваме втори по -1.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Следователно $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

От условие, извеждаме че $A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}$. По Теорема, $A = S^{-1}AT =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \\ 14 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Домашна работа 3 по Алгебра 1. 3 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

03 Януари 2022

1,00/1,00 Точки Коментар: [няма]

3 Въпрос Спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ на линейно пространство V над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа, са дадени линейният оператор $\varphi_1 : V \to V$ с

$$\varphi_1(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (-2x_1 + 5x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_2 + x_3)e_2 + (x_1 - 2x_2 + x_3)e_3$$

за произволни $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ и линейният оператор $\varphi_2 : V \to V$ с

$$\varphi_2(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1e_1 + x_3e_2 + x_2e_3$$

за произволни $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
Спрямо базиса $f = (f_1, f_2)$ на линейното пространство W над $\mathbb{C}$ е дадено линейно изображение

$$\psi : V \to W \quad \text{с} \quad \psi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3)f_1 + (-2x_1 + 4x_2 - 6x_3)f_2$$

за произволни $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. За кои стойности на комплексния параметър $p \in \mathbb{C}$ композицията $\psi(\varphi_1 + p\varphi_2) = \mathbb{O}$ е нулевото изображение $\mathbb{O} : V \to W$ с $\mathbb{O}(v) = \mathcal{O}_W$ за всяко $v \in V$.

Решение:

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi_1 + p\varphi_2) &= \psi((-2x_1 + 5x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + x_2 + x_3)e_2 + (x_1 - 2x_2 + x_3)e_3 + p(x_1e_1 + x_3e_2 + x_2e_3)) = \\
&= \psi((-2x_1 + 5x_2 + x_3 + px_1)e_1 + (x_1 + x_2 + x_3 + px_3)e_2 + (x_1 - 2x_2 + x_3 + px_2)e_3) \\
\text{Полагаме: } &-2x_1 + 5x_2 + x_3 + px_1 = y_1,\ x_1 + x_2 + x_3 + px_3 = y_2,\ x_1 - 2x_2 + x_3 + px_2 = y_3 \\
&\implies \psi(\varphi_1 + p\varphi_2) = \psi(y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) = (y_1 - 2y_2 + 3y_3)f_1 + (-2y_1 + 4y_2 - 6y_3)f_2
\end{aligned}$$

Разглеждаме $y_1 - 2y_2 + 3y_3$:

$$\begin{aligned}
y_1 - 2y_2 + 3y_3 &= -2x_1 + 5x_2 + x_3 + px_1 - 2(x_1 + x_2 + x_3 + px_3) + 3(x_1 - 2x_2 + x_3 + px_2) = \\
&= -2x_1 + 5x_2 + x_3 + px_1 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2px_3 + 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 3px_2 = \\
&= -(1-p)x_1 - 3(1-p)x_2 - 2(1-p)x_3 = -(1-p)(x_1 + 3x_2 + 2x_3)
\end{aligned}$$

Разглеждаме $-2y_1 + 4y_2 - 6y_3$:

$$\begin{aligned}
-2y_1 + 4y_2 - 6y_3 &= -2(-2x_1 + 5x_2 + x_3 + px_1) + 4(x_1 + x_2 + x_3 + px_3) - 6(x_1 - 2x_2 + x_3 + px_2) = \\
&= 4x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 2px_1 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4px_3 - 6x_1 + 12x_2 - 6x_3 - 6px_2 = \\
&= 2(1-p)x_1 + 6(1-p)x_2 - 4(1-p)x_3 = (1-p)(2x_1 + 6x_2 - 4x_3)
\end{aligned}$$

Тоест, получаваме:

$$\psi(y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) = -(1-p)(x_1 + 3x_2 + 2x_3) \cdot f_1 + (1-p)(2x_1 + 6x_2 - 4x_3) \cdot f_2$$

$\implies$ За $p = 1$, $\quad \psi(v) = \mathcal{O}_W = \mathbb{O}(v) \quad \forall v \in V$

Домашна работа 3 по Алгебра 1. 4 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

03 Януари 2022

1,00/1,00 Точки   Коментар: [няма]

4 Въпрос Спрямо някакъв базис на линейното пространство U над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа, линейният оператор $\varphi : U \to U$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Да се намерят базиси на сечението $\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)$ и на сумата $\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$ на ядрото $\ker(\varphi)$ и образа $\operatorname{im}(\varphi)$ на φ.

Решение: Нека $e = (e_1, ..., e_n)$ да е базис на U. По определение, $A = (\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n))$, образувана по стълбове, и понеже A има 5 стълба, то $n = 5$ и $\dim(U) = 5$.

Ще намерим базис на $\ker(\varphi)$. Търсим $u \in U$, такова че $\varphi(u) = Au = \mathcal{O}$. Разглеждаме A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Събираме трети ред с втори. Умножаваме първи по -2 и събираме с трети. Събираме първи с четвърти и пети. Събираме новополучилият се трети ред с четвърти. Събираме новополучелият се четвърти ред с трети. Делим трети на -5 и пети на 4.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножаваме трети ред по -1 и събираме с пети.
Умножаваме трети ред по -3 и събираме с първи.
Умножаваме четвърти ред по -2 и събираме с първи.
Разменяме втори с трети и трети с четвърти. Изпускаме четвърти и пети.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Общото решение на хомогенната система е:
$x_1 = -x_4 - 2x_5, \quad x_2 = -x_4, \quad x_3 = x_4, \quad \forall x_4, x_5 \in U$
Нейна фундаментална система решения е: $(-2, 0, 0, 0, 1),\ (-1, -1, 1, 1, 0)$

Следователно $d(\varphi) = \dim(\ker(\varphi)) = 2$. От Теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение в крайномерно пространство, $\operatorname{rk}(\varphi) := \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = \dim(U) - \dim(\ker(\varphi)) = 3$.

По Теорема, $\operatorname{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), ..., \varphi(e_5))$. То тогава три непропорционални вектора от $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_5)$ образуват базис на $\operatorname{im}(\varphi)$. Избираме:

$$\varphi(e_1) = (1, -2, 2, -1, -1)^t, \quad \varphi(e_2) = (3, -1, 1, 2, 1)^t \quad \text{и} \quad \varphi(e_3) = (2, -3, 3, 0, -2)^t$$

Ще намерим пространство от решения на $\operatorname{im}(\varphi)$. Решаваме матрица от коефициенти на базиса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред по -3 и събираме с втори.
Умножаваме първи ред по -2 и събираме с трети.
Разменяме втори и трети ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножаваме втори ред по -5 и събираме с трети.
Умножаваме втори ред по 2 и събираме с първи.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи по 5, умножаваме трети по 3 и събираме с първи.
Умножаваме втори по 5, умножаваме трети по 2 и събираме с втори.

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Общото решение на хомогенната система решения е:

$$x_1 = -\frac{7x_5}{5}, \quad x_2 = \frac{5x_3 - 8x_5}{5}, \quad x_4 = \frac{4x_5}{5} \quad \forall x_3, x_5 \in U$$

Нейна фундаментална система решения е: $(-7, -8, 0, 4, 5)$, $(0, 1, 1, 0, 0)$.

Базис на сечението $\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)$ е матрица на хомогенните системи уравнения на $\ker(\varphi)$ и $\operatorname{im}(\varphi)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & -8 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи по 7 и събираме с четвърти. Умножаваме втори по 8 и събираме с четвърти. Умножаваме втори по -1 и събираме с пети. Делим новополучилият се четвърти на 19. Умножаваме трети по -1 и събираме с новополучилият се пети. Чрез четвърти зануляваме четвърта колона на другите редове.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Общото решение на на получената система е:

$$x_1 = -x_5, \quad x_2 = x_5, \quad x_3 = -x_5, \quad x_4 = -x_5 \quad \forall x_5 \in U$$

Следователно, $(-1, 1, -1, -1, 1)$ е базис на $\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)$

Базис на сумата $\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$ е максимална линейно независима подсистема на базисите на $\ker(\varphi)$ и $\operatorname{im}(\varphi)$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножаваме втори ред по -2 и събираме с първи. Умножаваме втори ред по 5 и събираме с трети. Събираме новополучилият се трети с четвърти. Събираме новополучилият се четвърти с пети. Делим пети на 19 и зануляваме дясната колона на другите редове.

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Делим първи ред на 2 и трети на 5. Събираме трети с първи. Умножаваме трети по -1 и събираме с втори. Делим четвърти на пет и зануляваме четвъртата колона на другите редове. Умножаваме втори и трети ред по -1. Изпускаме първи ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получената система е състои от четири ЛНЗ вектора, които са базис на $\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$: $(1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, -1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1)$