Домашна работа 2 по Алгебра 1. 1 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

0,50/1,00 Точки Идеално сте оформили решението, но не сте разгелдали случаите на b=0 и a=d

1 Въпрос Да се пресметне детерминантата

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & d & d & \cdots & d & d \\ c & d & a & d & \cdots & d & d \\ c & d & d & a & \cdots & d & d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c & d & d & d & \cdots & a & d \\ c & d & d & d & \cdots & d & a \end{vmatrix}$$

от ред $n \in \mathbb{N}$ с комплексни елементи $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

Решение: Умножавме първи ред по $-\frac{d}{b}$ и събираме с всички други редове. Получаваме:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b & \cdots & b & b \\ c-\frac{ad}{b} & a-d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & a-d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & 0 & a-d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-d & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-d \end{vmatrix}$$

След това, умножаваме последния ред по $-\frac{b}{a-d}$ и събираме с първия, умножаваме предпоследния със същата дроб и събираме с първия и так. нат. до втория ред включително. Общо правим $n-1$ умножения и събирания с първия ред. Резултатът е:

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & a-d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & a-d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & 0 & a-d & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-d & 0 \\ c-\frac{ad}{b} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-d \end{vmatrix}$$

$$\text{Където } A = a + (n-1)\left[\left(c - \frac{ad}{b}\right) \cdot \left(-\frac{b}{a-d}\right)\right] = a + (n-1)\left(\frac{ad-bc}{a-d}\right)$$

Детерминантата е триъгълна относно вторичния диагонал, следователно:

$$\Delta_n = \left[a + (n-1)\left(\frac{ad-bc}{a-d}\right)\right](a-d)^{n-1}$$

Домашна работа 2 по Алгебра 1. 2 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

1,00/1,00 Точки   Коментар: [няма]

2 Въпрос Да се пресметне детерминантата

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} (x+a_1)^n & (x+a_2)^n & \cdots & (x+a_{n+1})^n \\ (x+a_1)^{n-1} & (x+a_2)^{n-1} & \cdots & (x+a_{n+1})^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x+a_1)^2 & (x+a_2)^2 & \cdots & (x+a_{n+1})^2 \\ x+a_1 & x+a_2 & \cdots & x+a_{n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

за произволно неотрицателно цяло число $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ и произволни рационални числа $x, a_1, a_2, ..., a_{n+1} \in \mathbb{Q}$

Решение: Разменяме първи ред с последния, втори ред с предпоследния и так. нат. Ако $n+1$ е нечетно, не правим нищо със средния ред, тоест правим общо $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ размени на редовете. Полагаме $y_i = x + a_i,\ i \in \{1, 2, ..., n+1\}$. Получаваме:

$$(-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n+1} \\ y_1^2 & y_2^2 & \cdots & y_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_{n+1}^{n-1} \\ y_1^n & y_2^n & \cdots & y_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Това е детерминантата на Вандермонд относно $y_i : W(y_1, y_2, ..., y_{n+1})$. От упражнения знаем, че тя е равна на $\prod_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=j+1}^{n+1} (y_i - y_j) \right) = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (y_i - y_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (x + a_i - (x - a_j)) = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (a_i - a_j)$.

Следователно $\quad \Delta_{n+1} = \boxed{(-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \left(\prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (a_i - a_j) \right)}$

Домашна работа 2 по Алгебра 1. 3 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

1,00/1,00 Точки Коментар: [няма]

3 Въпрос Да се реши матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ -1 & 12 & -7 \\ 2 & 6 & -3 \\ -3 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

с числови коефициенти.

Решение:

Полагаме $Y = X \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ и свеждаме към: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ -1 & 12 & -7 \\ 2 & 6 & -3 \\ -3 & 13 & -7 \end{pmatrix}$

Образуваме матрицата: $\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 8 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & -1 & 12 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 6 & -3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & -3 & 13 & -7 \end{array}\right)$

Умножаваме трети ред по -2 и събираме с първи, умножаваме трети по -3 и събираме с втори, умножаваме трети по -4 и събираме с четвърти. Получаваме:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -1 & -2 & 1 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -7 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -11 & -11 & 5 \end{array}\right)$$

Умножаваме първи ред по -1 и събираме с втори.
Умножаваме първи ред по -1 и събираме с четвърти.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -1 & -2 & 1 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -6 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

Умножаваме втори ред по -1 и събираме с първи.
Събираме втори ред с трети.
Умножаваме втори ред по -4 и събираме с четвърти.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Умножаваме четвърти ред по 2 и събираме с първи.
Умножаваме четвърти ред по -1 и събираме с трети.
Събираме първи ред с трети. Умножаваме първи ред по -1.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Разменяме първи ред с трети.
Разменяме втори с трети.
Разменяме трети с четвърти.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Лявата половина е в Гаус-Жорданов вид, следователно:

$$Y = X \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Транспонираме матричното уравнение и свеждаме към:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

От което образуваме матрицата

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Умножаваме втори ред по 2 и събираме с първи. Събираме втори ред с трети. Умножаваме новополучелият се трети ред по -5 и събираме с първи.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Умножаваме първи ред по -1. Събираме първи ред с втори. Умножваме трети по -2 и събираме с втори. Разменяме първи с втори и втори с трети ред.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Лявата половина е в Гаус-Жорданов вид.

$$\Longrightarrow X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Домашна работа 2 по Алгебра 1. 4 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

0,70/1,00 Точки В четвърти ред, трети стълб на втората матрица имате $p-\frac{3}{2}$, а не $p-\frac{1}{2}$. Започвате делението на случаи преди да имате триъгълен вид. Затова намалявам с 0,3, не за техн. грешка.

4 Въпрос Да се намери рангът на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & p & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & q & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

в зависимост от стойностите на комплексните параметри $p, q \in \mathbb{C}$

Решение: Умножаваме втори ред по -1 и събираме с първи. Събираме трети ред с четвърти. Разменяме първи ред с втори, втори с трети и трети с четвърти. Получаваме:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & q+1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & p-2 & 5 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред с -1 и събираме с втори.

Получения втори ред делим на 2 и събираме с първи и четвърти.

Умножаваме четвърти ред по -2 и събраме с трети.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & q+1 & -2p+1 & 0 \\ 0 & 0 & p-\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

I. Случай: $q+1=0$ и $-2p+1=0$

Ако и двете са нули, трети ред се занулява и получаваме Гаус-Жорданов вид с три линейно независими вектора. $\implies \operatorname{rk}(A)=3$

II. Случай: $q+1\neq 0$ и $-2p+1=0$ или $q+1=0$ и $-2p+1\neq 0$

Делим трети ред на ненулевата стойност. Поетапно чрез трети, втори и четвърти ред ще занулим трета, втора и четвърта колона на останалите редове.

Стигаме до Гаус-Жорданов вид с четири линейно независими вектора. $\implies \operatorname{rk}(A)=4$

III. Случай: $q+1\neq 0$ и $-2p+1\neq 0$

1) Подслучай: Трети ред е линейно зависим от втори ред.

Тогава $\exists x \in \mathbb{C}\,(q+1=2x$ и $-2p+1=x)$.

Следователно, $\operatorname{rk}(A)=3$ за произволно q, когато $p=-\frac{q-1}{4}$ (или за произволно p, когато $q=-4p+1$).

2) Подслучай: Трети ред не е линейно зависим от втори ред.

Умножаваме втори ред по $\frac{-(q+1)}{2}$ и събираме с трети. Делим трети на $-2p+1+\frac{-(q+1)}{2}$, след това поетапно чрез трети и четвърти ред зануляваме третата и четвъртата колона на останалите редове.

Стигаме до Гаус-Жорданов вид на три линейно независими вектора. $\implies \operatorname{rk}(A)=4$

$\implies$ Ако $\left(q=-1 \text{ и } p=\dfrac{1}{2}\right)$ или $\left(\text{За произволно } q,\ p=\dfrac{1-q}{4}\right)$ или $(\text{За произволно } p,\ q=1-4p)$,

то рангът $\operatorname{rk}(A)=3$, иначе $\operatorname{rk}(A)=4$