Домашна работа 1 по Алгебра 1. 1 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

1,00/1,00 Точки   Коментар: Благодаря за ясното решение и хубавото оформление.

1 Въпрос Да се реши системата линейни уравнения в зависимост от стойностите на параметрите $p, q \in \mathbb{C}$.

$$\left| \begin{array}{cccccccc} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & -5 \\ x_1 & -5x_2 & +x_3 & +2x_4 & +px_5 & = & q \\ -3x_1 & & +2x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & -7 \end{array} \right.$$

Решение: Правим разширена матрица на системата линейни уравнения:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & -5 & 1 & 2 & p & q \\ -3 & 0 & 2 & -1 & 2 & -7 \end{array} \right)$$

Събираме първия и втория ред с третия.
Делим третия ред на 4.
Събираме третия ред с първия.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 2 & -1 & \frac{p}{4}+3 & \frac{q}{4}-8 \\ 1 & -5 & 1 & 2 & p & q \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \frac{p}{4}+1 & \frac{q}{4}-3 \end{array} \right)$$

Умножваме втория ред с 2. Умножаваме първия ред с -1 и го събираме с втория.
Умножаваме третия с -10 и го събираме с втория.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 2 & -1 & \frac{p}{4}+3 & \frac{q}{4}-8 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & -\frac{3p}{4}-13 & -\frac{3q}{4}+38 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \frac{p}{4}+1 & \frac{q}{4}-3 \end{array} \right)$$

Умножваме първи ред с 5.
Умножваме трети ред с 10.
Разменяме втори и трети ред.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 10 & 0 & 10 & -5 & \frac{5p}{4}+15 & \frac{5q}{4}-40 \\ 0 & -10 & 10 & 0 & \frac{5p}{2}+10 & \frac{5q}{2}-30 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & -\frac{3p}{4}-13 & -\frac{3q}{4}+38 \end{array} \right)$$

Събираме трети ред с първи и втори.
Делим първи ред на 10.
Делим втори и трети ред на -10.

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{p}{20}+\frac{1}{5} & \frac{q}{20}-\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7p}{40}+\frac{3}{10} & -\frac{7q}{40}-\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3p}{40}+\frac{13}{10} & \frac{3q}{40}-\frac{19}{5} \end{array} \right)$$

За произволни x_4 и x_5, извеждаме че:

$$x_1 = \frac{q}{20} - \frac{1}{5} - \left(\frac{p}{20}+\frac{1}{5}\right)x_5 = \frac{q-4-(p+4)x_5}{20}$$

$$x_2 = -\frac{7q}{40} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2}x_4 - \left(-\frac{7p}{40}+\frac{3}{10}\right)x_5 = \frac{-7q-32+20x_4+(7p-12)x_5}{40}$$

$$x_3 = \frac{3q}{40} - \frac{19}{5} + \frac{1}{2}x_4 - \left(\frac{3p}{40}+\frac{13}{10}\right)x_5 = \frac{3q-152+20x_4-(3p+52)x_5}{40}$$

Домашна работа 1 по Алгебра 1. 2 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

1,00/1,00 Точки   Коментар: [няма]

2 Въпрос В пространството F^4 на наредените четворки с елементи от поле F са дадени векторите

$$a_1 = (-1, 2, 1, 1),\ a_2 = (3, -1, 2, 2),\ a_3 = (4, 1, -1, 2),$$
$$a_4 = (1, -3, 2, 1),\ a_5 = (1, 3, 4, 4),\ a_6 = (-1, 7, -4, 0).$$

Да се намери базис на F^4, който се съдържа в множеството $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$.

Решение: Дадените вектори образуват следната матрица от коефиценти:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ -1 & 7 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Събираме първия ред с четвърти и пети,
умножаваме първия с -1 и го събираме с шести ред,
умножаваме първия с 3 и го събираме с втори ред,
умножаваме първия с 4 и го събираме с трети ред.

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 9 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Умножаваме петия ред с -1 и го събираме с втори и шести.
Делим пети ред на 5 и трети ред на 3.
Събираме резултатния пети ред с четвърти,
умножаваме пети ред с -1 и го събираме с първия.

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -6 \end{pmatrix}$$

Делим шести ред на 2.
Събираме резултатния шести ред с четвърти.
Умножаваме пети ред с -3 и събираме с трети.

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Умножаваме четвърти ред с -2 и събираме с трети,
събираме четвърти ред с пети,
умножаваме четвърти с -5 и събираме с шести.

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Умножаваме трети ред с -3 и събираме с шести.
Събираме трети ред с пети.
Умножаваме пети ред с -1 и събраме с първи.
Умножаваме с -1 първи, трети и четвърти ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

След размяна на втори с пети и трети с четвърти
и след премахване на последните два нулеви реда,
получаваме матрица в Гаус-Жорданов вид.
$\implies a_1, a_3, a_4, a_5$ са линейно независими вектори

$\dim\left(F^4\right) = 4$, следователно всеки базис на F^4 е съставен от четири линейно незаивисми вектора и от $a_1, a_3, a_4, a_5 \in \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, следва че (a_1, a_3, a_4, a_5) е базис на F^4

Домашна работа 1 по Алгебра 1. 3 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

1,00/1,00 Точки   Коментар: [няма]

3 Въпрос В пространството $\mathbb{Q}^5$ на наредените петорки рационални числа са дадени векторите

$$a_1 = (1, -1, 2, 3, 4),\ a_2 = (3, 1, -2, 1, -1),\ a_3 = (2, -3, 1, -1, 1).$$

Да се докаже, че a_1, a_2, a_3 е линейно независима система вектори и да се допълни тази система до базис на $\mathbb{Q}^5$.

Решение: Дадените вектори образуват следната система от вектори:

$$\left| \begin{array}{cccccccc} x_1 & -x_2 & 2x_3 & 3x_4 & 4x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & x_2 & -2x_3 & x_4 & -x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & x_3 & -x_4 & x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

Което се свежда до следната матрица от коефициенти:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред с -3 и го събираме с втори ред.
Умножаваме първи ред с -2 и го събираме с трети ред.
Разменяме втори ред с трети.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 4 & -8 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

Умножаваме втори ред с 4 и го събираме с трети ред.
Умножаваме втори ред с -1 и го събираме с първи ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 10 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -20 & -36 & -41 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред с 12, втори ред с -20 и трети ред с -3.

$$\sim \begin{pmatrix} 12 & 0 & 60 & 120 & 132 \\ 0 & 20 & 60 & 140 & 140 \\ 0 & 0 & 60 & 108 & 123 \end{pmatrix}$$

Умножаваме трети ред с -1 и го събираме с първи и втори ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 12 & 9 \\ 0 & 20 & 0 & 32 & 17 \\ 0 & 0 & 60 & 108 & 123 \end{pmatrix}$$

Делим първи ред с 12, втори ред с 20 и трети ред с 60.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{17}{20} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{5} & \frac{41}{20} \end{pmatrix}$$

Матрицата е в Гаус-Жорданов вид.
$\Longrightarrow$ a_1, a_2, a_3 са линейно независими вектори

Избираме поизволен $a_4 \in \mathbb{Q}^5 \setminus l\,(a_1, a_2, a_3)$ и произволен $a_5 \in \mathbb{Q}^5 \setminus l\,(a_1, a_2, a_3, a_4)$:

$$a_4 = (0, 0, 0, 1, 0)\ ,\quad a_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$$

От Лемата за линейна независимост, следва че a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 са линейно независими.
От $\dim\left(\mathbb{Q}^5\right) = 5$, знаем че всеки базис на $\mathbb{Q}^5$ е съставен от пет линейно независими вектора.

$\Longrightarrow$ $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ е базис на $\mathbb{Q}^5$

Домашна работа 1 по Алгебра 1. 4 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

0,75/1,00 Точки Коментар: Не сте доказали, че директната сума $U \oplus W$ съвпада с всички полиноми на x от степен най-много 4.

4 Въпрос В пространството $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$ на полиномите на x от степен ≤ 4 с реални коефициенти са дадени подмножества

$$U = \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} \mid f(1) = f(2) = f(-2) = 0 \right\} \text{ и}$$
$$W = \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} \mid f(1) = 2f'(1),\ f(3) = 0 \right\}.$$

Да се докаже, че U и W са подпространства на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$ и $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} = U \oplus W$ е тяхната директна сума.

Решение: За произволни полиноми $f, g \in U$ е в сила

$$\begin{aligned}
&(f+g)(1) = f(1) + g(1) = f(2) + g(2) = (f+g)(2) \\
&(f+g)(2) = f(2) + g(2) = f(-2) + g(-2) = (f+g)(-2) \\
&(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = 0 + 0 = 0 \\
&\implies (f+g) \in U
\end{aligned}$$

За произволен полином $f \in U$ и произволно реално число $r \in \mathbb{R}$ е в сила

$$\begin{aligned}
&(rf)(1) = r \cdot f(1) = r \cdot f(2) = (rf)(2) \\
&(rf)(2) = r \cdot f(2) = r \cdot f(-2) = (rf)(-2) \\
&(rf)(-2) = r \cdot f(-2) = r \cdot 0 = 0 \\
&\implies (rf) \in U
\end{aligned}$$

$\implies$ U е подпространство на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$

За поризволни полиноми $f, g \in W$ е в сила

$$\begin{aligned}
&(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2f'(1) + 2g'(1) = 2(f' + g')(1) \\
&(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0 \\
&\implies (f+g) \in W
\end{aligned}$$

За произволен полином $f \in U$ и произволно реално число $r \in \mathbb{R}$ е в сила

$$\begin{aligned}
&(rf)(1) = r \cdot f(1) = r \cdot 2f'(1) = 2(rf')(1) \\
&(rf)(3) = r \cdot f(3) = r \cdot 0 = 0 \\
&\implies (rf) \in W
\end{aligned}$$

$\implies$ W е подпространство на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$

Сумата $U + W$ е директна, тогава и само тогава когато сечението $U \cap W = 0$ се изчерпва от тъждествено нулевия полином $0 \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$.
Ако $f(x) \in U \cap W$, то $f(1) = f(2) = f(-2) = 0$, $f(1) = 2f'(1) = 0$ и $f(3) = 0$.
Следователно, коефициентите $a_i \in \mathbb{R}$ на полинома $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$ и на неговата производна $f(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ изпълняват равенствата

$$\begin{array}{rcll} f(1) & = & a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 & = 0 \\ f(2) & = & a_4 \cdot 16 + a_3 \cdot 8 + a_2 \cdot 4 + a_1 \cdot 2 + a_0 & = 0 \\ f(-2) & = & a_4 \cdot 16 - a_3 \cdot 8 + a_2 \cdot 4 - a_1 \cdot 2 + a_0 & = 0 \\ f'(1) & = & 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 & = 0 \\ f(3) & = & a_4 \cdot 81 + a_3 \cdot 27 + a_2 \cdot 9 + a_1 \cdot 3 + a_0 & = 0 \end{array}$$

Тоест, $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^5$ е решение на хомогенна система линейни уравнения с матрица от коефициенти:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 16 & -8 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред с -4 и го събираме с четвърти ред.
Умножаваме първи ред с -81 и го събираме с пети ред.
Умножаваме втори ред с -1 и го събираме с трети ред.
Умножаваме първи ред с -16 и го събираме с втори ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -12 & -14 & -15 \\ 0 & -16 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -54 & -72 & -78 & -80 \end{pmatrix}$$

Делим трети ред на -4.
Делим четвърти ред на -1.
Делим четвърти прети ред на -2.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -12 & -14 & -15 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 27 & 36 & 39 & 40 \end{pmatrix}$$

Умножаваме четвърти ред с 8 и събираме с втори.
Умножаваме четвърти ред с -4 и събираме с трети.
Умножаваме четвърти ред с -27 и събираме с пети.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -18 & -42 & -68 \end{pmatrix}$$

Умножаваме втори ред с 2 и събираме с трети.
Умножаваме пети ред с -2.
Умножаваме втори ред с -9.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -36 & -90 & -153 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 36 & 84 & 136 \end{pmatrix}$$

Събираме втори ред с пети. Делим втори ред на -9.
Умножаваме трети ред с 6.
Умножаваме пети ред с 9.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 108 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -54 & -153 \end{pmatrix}$$

Събираме трети ред с пети. Делим пети ред с -45.
Умножаваме и събираме пети ред с другите редове,
така че в десния стълб на тези редове да останат нули.

Чрез поредица от аналогични действия за другите редове и чрез размяна на втори с четвърти и трети с четвърти ред, системата се свежда до Гаус-Жорданов вид.
Следователно $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, което означава, че $U \cap W = \{0\}$ и сумата $U \oplus W$ е директна.