Лекция 1 Реални числа - първа част

Доказателство за $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Допускаме противното, тоест $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Б.О.О. считаме p и q за взаимно прости.
$2q^2 = p^2$ Следователно p^2 се дели на 2 без остатък. То, p също. Следователно представяме $p = 2r$
Заместваме и получаваме $q^2 = 2r^2$ Аналогично, q се дели на 2. p и q са четни, противоречие! $\square$

Упражнение: Да се докаже, че $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, като $A + B := \{a + B : a \in A, b \in B\}$

I. $\sup A + \sup B$ е горна граница на $A + B$

$$\left.\begin{array}{l}\text{За произволно } a \in A \text{ , } \sup A \geq a \\ \text{За произволно } b \in B \text{ , } \sup B \geq b\end{array}\right\} \implies a + b \leq \sup A + \sup B$$

$$\implies \forall x \in A + B : \sup A + \sup B \geq x$$

II. Всяко $c < \sup A + \sup B$ не е горна граница
Полагаме $0 < \varepsilon = \sup A + \sup B - c$. $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < \sup A \Rightarrow \exists a_0 \in A : a_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$, аналогично за b_0.
Следователно $a_0 + b_0 > \sup A + \sup B - \varepsilon \quad a_0 + b_0 > c$, тогава c няма как да бъде горна граница. $\square$

Доказателство за Принцип на непрекъснатост

I. Разглеждаме непразно $B := A \cap [0; +\infty)$, ограничени отгоре. Ако съществуват, $\sup A \equiv \sup B$
Построяваме $\overline{a} = \overline{a_0}.\overline{a_1}\,\overline{a_2} \cdots \in \mathbb{R}$, така че $\overline{a_0} = \max\{\lfloor a \rfloor : a \in B\}$ и

$$\overline{a_i} = \max\{a_i \in \{0, ..., 9\} : \ \exists a \in B, a = \overline{a_0}.\overline{a_1} \cdots \overline{a_{i-1}}\, a_i \cdots\}$$

Твърдим, че $\overline{a} = \sup B$. Фиксираме произволно $a \in B$.
Ако $\overline{a_i} = a_i$ за всяко $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то $\overline{a} = a$
Ако съществува $\overline{a_n} \neq a_n$, то $\overline{a_n} > a_n$ (от конструкцията, няма как $\overline{a_n} < a_n$). Тогава $\overline{a} > a$
Твърдим, че произволно $d \in B$ не е горна граница. Ще покажем, че $d < a$ за някое $a \in B$
Понеже $d < \overline{a}$, то съществува n, такова че $d_i = \overline{a_i} \quad \forall i \in \{0, 1, ..., n\}$ и $d_{n+1} < \overline{a_{n+1}}$
Чрез конструкцията, съществува $a = \overline{a_0}.\overline{a_1} \cdots \overline{a_n}\, \overline{a_{n+1}}\, a_{n+2} \cdots$ и $d < a \ (< \overline{a})$
II. Подобно разглеждаме непразното $B := A \cap (\infty; 0)$ $\square$

Лекция 2 Реални числа - втора част и сходящи редици

Доказателство за Аксиома на Архимед

Допускаме противното, че $A = \{e, e + e, ..., ne, ...\}$ (ne е n-пъти e събрано със себе си).
Съгласно *Принцип за непрекъснатост*, съществува $\sup A$. То тогава $\sup A - e < \sup A$.
От дефиницията за супремум, съществува $ne > \sup A - e \quad (n + 1)e > \sup A$, противоречие! $\square$

Доказателство за "Интервалът $(a; b)$ съдържа поне едно рационално число, при $a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$"

Б.О.О. $a = a_0.a_1a_2 \cdots$ и $b = b_0.b_1b_2 \cdots$ са неотрицателни. Б.О.О. a не завършва на 9 в период.
От $a < b$, значи съществува $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такова че $a_i = b_i \quad \forall i \in \{0, 1, ..., n - 1\}, a_n < b_n$.
Нека $a_j \neq 9$ за $j \geq n + 1$. $r := a_0.a_1a_2 \cdots a_{j-i}(a_j + 1)$ е крайна десетична дроб между a и b. $\square$

Доказателство за "Сходящите редици са ограничени"

Нека $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Тогава $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)\}$ е кофинитно. Нека $a_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ за всички $n \geq n_0$. Следователно, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [m, M]$, където $m = \min\{a_1, ..., a - \varepsilon\}$ и $M = \max\{a_1, ..., a + \varepsilon\}$ $\square$

Доказателство за Лемата за двамата полицаи

$$\begin{array}{l}\exists n_1 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_1 : a_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon) \\ \exists n_2 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_2 : b_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)\end{array} \quad n_0 = \max\{n_1, n_2\}. \text{ Тогава } \ \forall n \geq n_0 : a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$

$$\implies c_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon) \ \ \forall n \geq n_0$$ $\square$

Лекция 3 Редици от реални числа

Доказателство за $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \iff \frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

($\Rightarrow$) От деф. за сходяща редица върху $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, искаме $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$. Тоест, търсим да покажем $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. $(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}) \cup (\frac{1}{\varepsilon}; \infty)$ е околност на ∞, то $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$.

($\Leftarrow$) Разглеждаме произволно $\frac{1}{M} > 0$. Щом $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{M}$. Това е еквивалентно на $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n| > M$, точно деф. на $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ $\square$

Доказателство за "Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща и ограничена отгоре, то тя е сходяща."

От принципа за непрекъснатост, съществува супремум L на множеството $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
За произволно ε, $L - \varepsilon < L \Rightarrow \exists n_0 : a_{n_0} > L - \varepsilon$. За $n \geq n_0$, $L - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq L < L + \varepsilon$.
Следователно $a_n \in (L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ за всяко $n \geq n_0$ и редицата е сходяща към L. $\square$

Лекция 4 Редици от релани числа. Граници на функции.

Доказателство за "Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то a е единствена точка на сгъстяване"

(Границата е точка на сгъстяване, понеже кофинитните множества са безкрайни.)
Допускаме противното, тоест че съществува $b \in \mathbb{R}, b \neq a$ точка на сгъстяване.
Нека U околност на a и V околност на b, такива че $U \cap V = \emptyset$.

$$\underbrace{\{n \in \mathbb{N} : a_n \in U\}}_{\text{кофинитно (}a\text{ граница)}} \implies \underbrace{\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin U\}}_{\text{крайно}} \supset \underbrace{\{n \in \mathbb{N} : a_n \in V\}}_{\text{безкрайно (}b\text{ т. на сгъстяване)}}$$

Безкрайно множество се съдържа в крайно, противоречие! $\square$

Доказателство на "Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е подредица. Тогава $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е сходяща към границата на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$"

Нека $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ и U околност на a, то $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n \in U$. $n_1 < n_2 < ... \Rightarrow \exists n_{k_0} \geq n_0$.
Тогава $\forall k \geq k_0 : n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$ и следователно $a_{n_k} \in U$. Получихме $a_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ $\square$

Доказателство на "a е точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \iff$ съществува подредица $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$"

I. съществува подредица $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a \implies a$ е т. на сгъстяване
Нека U е околност на a. $\exists k_0\ \forall k \geq k_0 : a_{n_k} \in U$

II. a е т. на сгъстяване $\implies$ съществува подредица $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$
За околност $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\exists n_1 : a_{n_1} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Понеже околността е с безкраен брой членове, а $\{1, ..., n_1\}$ е крайно, то $\exists n_2, n_2 > n_1 : a_{n_2} \in (a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$. Така до $a_{n_k} \in (a - \frac{\varepsilon}{k}, a + \frac{\varepsilon}{k})$.
Построихме $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. То тогава $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е подредица и $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \implies a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$ $\square$

Доказателство на Теоремата на Болцано-Вайерщрас (Принцип за компактност)

I. Всяка ограничена редица има сходяща подредица
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена $\implies$ означаваме $a_n \in [b_0, c_0]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Броят членове на поне един от интервалите $\left[b_0, \frac{b_0+c_0}{2}\right]$ и $\left[\frac{b_0+c_0}{2}, c_0\right]$ е безкраен, означаваме този интервал с $[b_1, c_1]$. Продължаваме така до $[b_k, c_k]$.
Забелязваме, че $b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_k \leq \cdots < c_0$ и $c_0 \geq c_1 \geq \cdots \geq c_k \geq \cdots > b_0$.
То $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ е растяща и ограничена отгоре, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ е намаляваща и ограничена отдолу.

II. Всяка ограничена редица има точка на сгъстяване

Нека означим границата на $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$: $b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$. Тогава:

$$|c_k - a| \leq |c_k - b_k| + |b_k - a| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 + 0 \implies c_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$$

Нека $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ е околност на a. $b_k \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\ \ \forall k \geq k_1$ и $c_k \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\ \ \forall k \geq k_2$. Нека $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. То тогава, по конструкция, $[b_{k_0}, c_{k_0}] \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ има безброй много членове.

Следователно, във всяка околност на a има безброй много членове. □

Доказателство на "Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена редица с единствена точка на сгъстяване. Тогава редицата е сходяща."

Означаваме $a_n \in [b, c]$. Ще докажем, че a (т. на сгъстяване) е граница. Допускаме противното.

Следователно, съществува ε, такова че извън околността $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ има безброй членове.

Тоест, или в $[b, a-\varepsilon]$, или в $[a+\varepsilon, c]$ има безброй члена. То тогава съществува т. на сгъстяване $d \in [b, a-\varepsilon], d \neq a$, или $d' \in [a+\varepsilon, b], d' \neq a$, но по условие има само една точка на сгъстяване, противоречие! □

Доказателство на Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост на редица

I. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща $\implies$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална

Нека границата е a. За произволно $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, съществува $n_0 \in \mathbb{N}$, такова че $\forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и аналогично $\forall m \geq n_0 : |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{(деф. за фундаментална редица)}$$

II. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална $\implies$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща

От фундаменталност $\Rightarrow$ за произволно $\varepsilon\ \ \exists n_0\ \ \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$. В частност $m = n_0$ и $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon \implies a_n \in (a_{n_0} - \varepsilon, a_{n_0} + \varepsilon)\ \ \forall n \geq n_0 \implies \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

От принципа за компактност, съществува сходяща подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Нека $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$.

От фундаменталността $\Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}\quad \forall n, m \geq n_0 \implies |a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}\quad \forall n_k \geq n_0\ \ \forall k \geq k_1$.

Щом подредицата е сходяща, то $\exists k_2\ \ \forall k \geq k_2 : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

За $k := \max\{k_1, k_2\}$ е винаги изпълнено $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ще докажем, че $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$: $|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ □

Лекция 5 Граници на функции

Доказателство на "Дефинициите за граница във формата на Коши и Хайне са еквивалентни"

I. Форма на Коши $\implies$ Форма на Хайне

Нека $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ и за произволна редица $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0, x_n \in D, x_n \neq x_0$. Разглеждаме околност $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. От деф. на Коши: $\exists \delta > 0\ \ \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0 : f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Също, $\exists n_0\ \ \forall n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \delta$ и следователно $f(x_n) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Доказахме $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$

II. Форма на Хайне $\implies$ Форма на Коши

Допускаме противното, тоест

$$\neg(\ \forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall x, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta : |f(x) - L| < \varepsilon) \quad \equiv \quad \exists\varepsilon\ \forall\delta\ \exists x, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta : |f(x) - L| \geq \varepsilon$$

Разглеждаме при $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$:

$$\begin{aligned}
&\delta = 1 \Rightarrow\ \exists x_1, x_1 \geq x_0, |x_1 - x_0| < 1 : |f(x_1) - L| \geq \varepsilon \\
&\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow\ \exists x_2, x_2 \geq x_0, |x_2 - x_0| < \frac{1}{2} : |f(x_2) - L| \geq \varepsilon \\
&\vdots \\
&\delta = \frac{1}{n} \Rightarrow\ \exists x_n, x_n \geq x_0, |x_n - x_0| < \frac{1}{n} : |f(x_n) - L| \geq \varepsilon \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Понеже $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, имаме редицата $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. От Хайне $\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$, противоречие с $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$! $\square$

Доказателство на "Ако $f : D \to D_1, \quad g : D_1 \to \mathbb{R}, \quad D, D_1 \subset \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0, f(x) \neq y_0$ при $x \neq x_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = L$, то съществува $\lim\limits_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = L$"

По условие $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, то от дефиницията на Хайне за граница на функция за $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, следва че $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$. Означаваме $y_n := f(x_n)$.

Тогава знаем $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_1, y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$. Отново от дефиницията на Хайне, следва че $g(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

Съществуването на границата идва от $g(y_n) = g(f(x_n)) = (g \circ f)(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$. $\square$

Доказателство на "Необходимо и достатъчно условие на Коши за съществуване на граница на функция"

Съществува $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x', x'' \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

($\Rightarrow$) Избираме $\varepsilon > 0$, тогава $\exists\delta > 0\ \forall x \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} : |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

Нека $x', x'' \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}$ произволни. Тогава

$$\left.\begin{array}{l} |f(x') - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x'') - L| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| = |f(x') + L - L - f(x'')| \leq |f(x') - L| + |f(x'') - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Разглеждаме произволно $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Ще докажем, че $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална. Избираме произволно $\varepsilon > 0$, тогава:

$$\exists\delta > 0\ \forall x', x'' \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \delta$. Следователно $\forall n \geq n_0, x_n \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\}$.
Избираме произволни $m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq n_0, \quad x_m, x_n \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$

Доказахме, че $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална (следователно и сходяща). Ще проверим, че границата на $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ зависи само от f и x_0. Нека се приближаваме към x_0 по два различни начина:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \text{ е фундаментална} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L'$$
$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}, y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \Rightarrow \{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty} \text{ е фундаментална} \Rightarrow f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L''$$

Разглеждаме редицата $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. То тогава редицата $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ е сходяща. Понеже всяка подредица на сходяща редица има същата граница, то $L' = L = L''$. $\square$

Доказателство на "$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ съществува $\iff \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ съществуват"

($\Rightarrow$) Очевидно (рестрикцията на лявата и дясната околност на x_0 не променя границата).
($\Leftarrow$) Нека $f : D \to \mathbb{R}, D \equiv (x_0 - \overline{\delta}, x_0 + \overline{\delta}) \setminus \{x_0\}$ и $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Избираме произволно $\varepsilon > 0$ и тогава:

$$\lim\nolimits_{x\to x_0^-} f(x) - L \Rightarrow\ \exists\delta_1 > 0\ \forall x \in D \cap (x_0 - \delta_1, x_0) : |f(x) - L| < \varepsilon$$
$$\lim\nolimits_{x\to x_0^+} f(x) - L \Rightarrow\ \exists\delta_2 > 0\ \forall x \in D \cap (x_0, x_0 + \delta_2) : |f(x) - L| < \varepsilon$$

Полагаме $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \overline{\delta}\}$. Тогава $\forall x \in D, |x - x_0| < \delta$:

$$\left.\begin{array}{l} x > x_0 \Rightarrow x \in (x_0, x_0 + \delta) \subset (x_0, x_0 + \delta_2) \cap D \\ x < x_0 \Rightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0) \subset (x_0 - \delta_1, x_0) \cap D \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$\square$

Лекция 6 Непрекъснати функции

Доказателство на Теоремата на Болцано

Б.О.О. нека $f(a) < 0, f(b) > 0$. Разглеждаме $A = \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}$, то е непразно и ограничено. Следователно притежава $\inf A = x_0$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ е непрекъсната в } a \\ f(a) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \delta_1 > 0\ \forall x \in [a, a+\delta_1) : f(x) < 0 \implies x_0 \geq a + \delta_1 > a$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ е непрекъсната в } b \\ f(b) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \delta_2 > 0\ \forall x \in (b-\delta_2, b] : f(x) > 0 \implies x_0 \leq b - \delta_2 < \delta$$

Ако $f(x_0) > 0$ и имаме $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ то, следва че $\exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) > 0$. Следователно $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$ и x_0 не е долна граница, противоречие!

Ако $f(x_0) < 0$ и имаме $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ то, следва че $\exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) < 0$. Следователно $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta) : x \notin A$. Ясно е че $\forall x \in [a, x_0) : x \notin A$. Следователно $x_0 + \delta$ е долна граница на A, противоречие!

Остава $f(x_0) = 0$. $\square$

Доказателство на Теоремата за междинните стойности

Разглеждаме $g(x) = f(x) - c$. Тя е непрекъсната, дефинирана в $[a, b]$ и е в сила $g(a) \cdot g(b) < 0$.

От Теоремата на Болцано, получаваме $0 = g(x_0) = f(x_0) - c, x_0 \in (a, b)$. $\square$

Доказателство на Теорема на Вайерщрас

I. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекъсната $\implies$ ограничена

Допускаме, че $f([a, b])$ не е ограничено, тоест $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists x \in [a, b] : |f(x)| > N$. Строим редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b]$ (за която $|f(x_n)| > n$):

$$\begin{array}{l} \text{За } N = 1 : \ \exists x_1 \in [a, b], \quad |f(x_1)| > 1 \\ \text{За } N = 2 : \ \exists x_2 \in [a, b], \quad |f(x_2)| > 2 \\ \quad \vdots \\ \text{За } N = n : \ \exists x_n \in [a, b], \quad |f(x_1)| > n \\ \quad \vdots \end{array}$$

От Теоремата на Болцано-Вайерщрас, имаме сходяща подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$. $x_0 \in [a, b]$ и f непрекъсната в $x_0 \implies f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$. Обаче по построение, $|f(x_{n_k})| > n_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, противоречие!

II. $\implies$ има максимална и минимална стойност

Строим редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b]$ (за която $f(x_n) > \sup f([a, b]) - \frac{1}{n}$):

$$\text{За произволно } n \in \mathbb{N} : \left(\sup f([a, b]) - \frac{1}{n}\right) < \sup f([a, b]) \implies \exists x_n \in [a, b] : \left(\sup f([a, b]) - \frac{1}{n}\right) < f(x_n)$$

От Теоремата на Болцано-Вайерщрас, имаме сходяща подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_{max}$.

$x_{max} \in [a, b]$ и f непрекъсната в $x_0 \implies f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_{max})$.

От друга страна, по построение, $\sup f([a, b]) - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq \sup f([a, b])$, където $\sup f([a, b]) - \frac{1}{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \sup f([a, b])$ и $\sup f([a, b]) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sup f([a, b])$. От лемата за двамата полицаи, $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sup f([a, b])$.

Следователно $f(x_{max}) = \sup f([a, b])$.

Правим аналогично за $\inf f([a, b])$. $\square$

Доказателство на Теорема на Кантор

Допускаме противното, че f не е равномерно непрекъсната в $[a, b]$:

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in [a, b]\ \exists x' \in [a, b], |x - x'| < \delta : |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0$$

Построяваме редиците $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b]$:

$$\begin{aligned}
&\delta = 1 \Rightarrow \ \exists x_1, x'_1 \in [a,b] : |x_1 - x'_1| < 1 \text{ и } |f(x_1) - f(x'_1)| \geq \varepsilon_0 \\
&\delta = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \ \exists x_2, x'_2 \in [a,b] : |x_2 - x'_2| < \tfrac{1}{2} \text{ и } |f(x_2) - f(x'_2)| \geq \varepsilon_0 \\
&\quad\vdots \\
&\delta = \tfrac{1}{n} \Rightarrow \ \exists x_n, x'_n \in [a,b] : |x_n - x'_n| < \tfrac{1}{n} \text{ и } |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0
\end{aligned}$$

TODO: FINISH

Лекция 7 Основни елементарни функции

Лекция 8 Диференцируемост и производна

Доказателство на "Ако f е диференцируема в x, то тя е непрекъсната в x"

Пресмятаме $\lim\limits_{y\to x} f(y) = \lim\limits_{y\to x}(f(y) - f(x)) + f(x) = \lim\limits_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(y-x) + f(x) = f'(x)\cdot 0 + f(x) = f(x)$.
Щом $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$, то f е непрекъсната в x. □

Лекция 9 Основни теореми за диференцируеми функции

Доказателство на Теорема на Ферма

Б.О.О. x_0 е точка на локален максимум, то $\exists\delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$ и $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x_0) \geq f(x)$. Разглеждаме $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
x клони към x_0 от ляво или отдясно:
За $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$. За $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$.
Следователно $f'(x_0) = 0$. □

Доказателство на Теорема на Рол

f е непрекъсната в $[a,b]$, то тогава от Теоремата на Вайерщрас, f е ограничена и $\sup f([a,b]) = f(x_{max}), \inf f([a,b]) = f(x_{min})$. Тогава поне едно от следните е изпълнено:

- $x_{min} \in (a,b)$, то x_{min} е локален минимум и от Теоремата на Ферма, $f'(x_{min}) = 0$
- $x_{max} \in (a,b)$, то x_{max} е локален максимум и от Теоремата на Ферма, $f'(x_{max}) = 0$
- $x_{min}, x_{max} \in \{a,b\}$, понеже $f(a) = f(b)$, то $f(x_{min}) = f(x_{max})$. f е константна и следвателно от Теоремата на Ферма $\forall\xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$ □

Доказателство на Теорема на Лагранж (Теорема на крайните нараствания)

Разглеждаме $g(x) = f(x) - kx$ (търсим такова k, че $g(x)$ да удовлетворява Теоремата на Рол). g е диференцируема в (a,b) и непрекъсната в $\{a,b\}$. Искаме $g(x) = g(b) \quad f(a) - ka = f(b) - kb \quad k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
От Теоремата на Рол, следва че съществува $\xi \in (a,b) : g'(\xi) = 0$.
Тоест $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - k \implies f'(\xi) = k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Доказателство на Принцип за константност (Основна теорема на диференциалното смятане)

($\Rightarrow$) Тривиално (производна на константа е нула)
($\Leftarrow$) Нека $\forall x \in \Delta : f'(x) = 0$. Избираме произволни $x_1, x_2 \in \Delta, x_1 < x_2$. Тогава $[x_1, x_2] \subset \Delta$ и от Теоремата на Лагранж получаваме, че съществува $\xi \in (x_1, x_2) : f'(\xi) = 0$. То $0 = f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ $\implies f(x_2) - f(x_1) = 0(x_2 - x_1) = 0$, тоест $f(x_2) = f(x_1)$ $\forall x_1, x_2 \in \Delta$ и f е константа. □

Доказателство на Принцип за монотонност

Б.О.О. разглеждаме растяща функция $f : \Delta \to \mathbb{R}$

($\Rightarrow$) От дефиницията за производна $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Забелязваме, че:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x > 0 \Rightarrow x + \Delta x > x,\ f(x+\Delta x) \geq f(x) \\ \Delta x < 0 \Rightarrow x + \Delta x < x,\ f(x+\Delta x) \leq f(x) \end{array}\right\} \implies \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \implies f'(x) \geq 0$$

$\square$

($\Leftarrow$) Избираме произволни $x_1, x_2 \in \Delta, x_1 < x_2$. Тогава $[x_1, x_2] \subset \Delta$ и от Теоремата на Лагранж получаваме, че съществува $\xi \in (x_1, x_2) : f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow (x_2 - x_1) f'(\xi) = f(x_2) - f(x_1)$. Тъй като $x_2 > x_1$ и $f'(\xi) \geq 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$ и f е растяща. $\square$

Доказателство на Теорема на Коши (Обобщена теорема за крайните нараствания)

Дефинираме $h(x) = f(x) - kg(x)$ и търсим k за което $h(a) = h(b)$. Тоест искаме

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \iff k(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a)$$

Допускаме че $g(a) = g(b)$ и от Теоремата на Рол, следва че съществува $x \in (a, b) : g'(x) = 0$. Това противоречи на третото условие , следователно $g(a) \neq g(b)$ и избираме $k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Понеже $h(a) = h(b)$, то от Теоремата на Рол съществува $\xi \in (a, b) : h'(\xi) = 0$. От правилата за диференциране, $h'(x) = f'(x) - kg'(x)$ и $0 = h'(\xi) = f'(\xi) - kg'(\xi) \implies \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. $\square$

Доказателство на 1-ва теорема на Лопитал (неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$)

Избираме произволно $x \in (a, b]$. От Обобщената теорема за крайните нараствания към f и g в $[x, b]$, намираме че съществува $\xi_x \in (x, b) : \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$. Имаме $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to b^-} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim\limits_{y \to b^-} \frac{f'(y)}{g'(y)}$, като полагаме $y := \xi_x$. Понеже $x \to_{x<b} b$, то $y = \xi_x \to_{y<b} b$. $\square$

Доказателство на 2-ра теорема на Лопитал (неопределеност от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$)

Избираме произволни $x, x_0 \in (a, b), a < x_0 < x < b$. От Обобщената теорема за крайните нараствания към f и g в $[x_0, x] \subset (a, b)$, намираме че съществува $\xi_{x,x_0} \in [x_0, x] : \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_{x,x_0})}{g'(\xi_{x,x_0})}$. Означаваме $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Нека $\varepsilon > 0$ произволно, тогава $\exists \overline{\delta} > 0, y \in (b - \overline{\delta}, b) : \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

TODO: FINISH